在外研究員研究報告書

２０２１　年７　月　１　日　受付

所　　属	理工学部	氏名	川口　周　㊞
職　　名	教授		
研究課題名	非アルキメデス幾何と代数力学系とその周辺		
研究期間	2018年　8月　1日　～　2020年　1月　15日		

滞在期間・滞在地研究調査先	滞在期間	滞在地	研究・調査先
	2018. 8. 1～2020. 1. 15	イギリス	オックスフォード大学

研究費	306.6万円	研究成果の概要	別記4,000字程度

発表	題目名	発表学術誌名 Vol. No.	発行年月日
	Effective faithful tropicalizations associated to adjoint linear systems (with Kazuhiko Yamaki)	International Mathematics Research Notices 2019 (2019), no. 19, 6089-6112	2019年10月
	演題	**講演学会名**	**講演年月日**
	Heights and periodic points for one-parameter families of Henon maps	Intercity Seminar on Arakelov Geometry, University of Copenhagen	2018年9月
	演題	**講演学会名**	**講演年月日**
	Some arithmetic properties of one-parameter families of Henon maps	Vietnam-USA Joint Mathamatical Meeting, Special Session on Complex Geometry and Dynamical Systems, Quy Nhon, Vietnam	2019年6月

研究成果の概要

川口 周（同志社大学理工学部）

1 はじめに

私は，2018 年 8 月から 2020 年 1 月まで，在外研究を行う機会を頂いて，イギリス・オックスフォード大学の数学研究所に滞在した．今から振り返ると，新型コロナウイルスの影響が出る前に帰国できて幸運だったと思う．私は京都大学数学教室の助手だった 15 年ほど前に，フランス・パリ第 6 大学（現在のソルボンヌ大学）とスペイン・バルセロナ数学研究センターに 1 年弱滞在し，また，パリ第 6 大学にはその後に合計 2 ヶ月客員教授として滞在したが，それ以来の海外長期滞在となった．

さて，今回の数学研究所での滞在では，ダミアン・ロスラー教授に受け入れ教員になって頂いて，数論グループに属した．ロスラー教授はほぼ同じ分野の研究者である．初めてお会いしたのは 2002 年のフランス・リュミニ数学研究所での研究集会だったと思う．私がパリ第 6 大学に長期滞在したときにはロスラー氏もパリ第 6 大学に所属していて，5 年ほど前にオックスフォード大学の数学研究所に教授として移られた．

在外研究期間中は，ロスラー教授と議論もしたが，主に日本で取り組んできた研究を進展させることに力を入れた．これらの研究は，基盤研究 (B)「Berkovich 解析空間とトロピカル幾何，代数・数論力学系の展開」の援助も受けている．

以下に，在外研究期間中に行った研究を 2 つ挙げる．

2 j 関数とボーチャーズ Φ 関数の関係

j 関数とボーチャーズ Φ 関数の関係について，向井茂氏（京都大学）と吉川謙一氏（京都大学）と共同で研究を進めた．吉川謙一氏には，2019 年 3 月にオックスフォード大学の数学研究所に来て頂き，議論をして研究を進めることができた．この研究の詳細は，プレプリント arXiv:2103.02540 を参照していただきたい．以下でその概要を述べる．

2.1 j 関数

$\mathbb{H} = \{\tau \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\tau > 0\}$ を複素上半平面とする．$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ が $\mathbb{H}$ に作用し，商 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ は楕円曲線の同型類を特徴づける．

j 関数 $j\colon \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ は，$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の作用に関して不変な正則関数であり，解析的同型 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H} \to \mathbb{C}$ を導く．j 関数はさまざまな非常に良い性質をもっている．例えば，τ が実でない 2 次無理数のとき，$j(\tau)$ は代数的整数になる．値 $j(\tau)$ は singular modulus とよばれる．

j 関数だけでなく，j 関数の差も非常に良い性質を持っていることが知られている．例えば，グロスとザギエの有名な singular moduli の結果は，j 関数の実でない 2 次無理数での値の差の積で表される整数の素因数分解の明示的な公式を与えるものである．また j 関数の差についての有名な性質として，j 関数の差は無限積展開をもつことが知られている．これは，ボーチャーズによるモンスター・リー代数の分母公式の 1 つである．

私たちの研究では，j 関数の差がボーチャーズ Φ 関数と結びついていることを示した．

2.2 ボーチャーズ Φ 関数

$K3$ 曲面とエンリケス曲面

$K3$ 曲面は，コンパクトな複素曲面の分類理論に現れる 1 つのクラスをなす．例えば，A をアーベル曲面とし，$[-1]\colon A \to A$ を $x \mapsto -x$ で与えられる写像とするとき，商空間 $A/[-1]$ の 16 個の特異点をブローアップした曲面 $\mathrm{Km}(A)$ は $K3$ 曲面になる．$\mathrm{Km}(A)$ をクンマー曲面という．特に，$E_\tau \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$，$E_{\tau'} \cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau')$ を楕円曲線とすると，$\mathrm{Km}(E_\tau \times E_{\tau'})$ は $K3$ 曲面になる．これを，積型のクンマー曲面という．

エンリケス曲面も，コンパクトな複素曲面の分類理論に現れる 1 つのクラスをなす．エンリケス曲面は，単連結でなく，普遍被覆が $K3$ 曲面になる連結でコンパクトな複素曲面である．Y をエンリケス曲面とし，X を Y の普遍被覆である $K3$ 曲面とする．このとき，被覆写像 $X \to Y$ は $2:1$ になり，被覆写像は X の対合写像 $\iota_Y\colon X \to X$ を定める．ι_Y は固定点自由で反シンプレクティックである．

$\mathfrak{D}$ を $\mathbb{H}\times\mathbb{H}$ の対角集合の $\Gamma(2)\times\Gamma(2)$ 軌道とする．例えば，積型のクンマー曲面 $\mathrm{Km}(E_\tau \times E_{\tau'})$ は，$(\tau,\tau') \notin \mathfrak{D}$ なら 15 個の固定点自由で反シンプレクティックな対合写像を持ち，さらに，(τ,τ') が very general であれば，その数はちょうど 15 個である（金銅，向井，大橋）．これら 15 個の対合写像は，9 個の偶の対合写像と 6 個の奇の対合写像に分かれる．

エンリケス曲面のモジュライ

格子 $\mathbf{\Lambda} = \left(\begin{smallmatrix}0&2\\2&0\end{smallmatrix}\right) \oplus \left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right) \oplus \mathbb{E}_8(2)$ はエンリケス格子とよばれる．ここで，$\mathbb{E}_8$ は負定値のユニモジュラーな階数 8 の格子である．

$$\Omega_{\mathbf{\Lambda}} = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\mathbf{\Lambda}\otimes\mathbb{C}) \mid (\omega,\omega)=0,\ (\omega,\overline{\omega})>0\}$$

とおく．$\Omega_{\mathbf{\Lambda}}$ は 2 つの連結成分からなり，そのうちの 1 つの連結成分を $\Omega_{\mathbf{\Lambda}}^+$ で表す．$\Omega_{\mathbf{\Lambda}}^+$ は次元が 10 の IV 型対称空間である．格子 $\mathbf{\Lambda}$ の距離同型で $\Omega_{\mathbf{\Lambda}}^+$ を保つものを $O^+(\mathbf{\Lambda})$ で表す．このとき，商空間 $\mathcal{M} = \Omega_{\mathbf{\Lambda}}^+/O^+(\mathbf{\Lambda})$ から判別式因子とよばれる因子 $\mathcal{H}$ を除いたものは，エンリケス曲面のモジュライになる．

ボーチャーズ Φ 関数

$S \subset \mathbb{P}(\mathbf{\Lambda}\otimes\mathbb{C})$ に対して，S 上の錐 $C(S)$ を $C(S) = \{\omega \in \mathbf{\Lambda}\otimes\mathbb{C}\setminus\{0\} \mid [\omega]\in S\}$ で定める．ボーチャーズ Φ 関数は，$C(\Omega_{\mathbf{\Lambda}}^+)$ 上の正則関数で，$O^+(\mathbf{\Lambda})$ に関する保形性をもち，重みが 4 で $C(\mathcal{H})$ でちょうど消えるものである．

$Z \in C(\Omega_{\mathbf{\Lambda}}^+)$ に対して，$\|\Phi(Z)\|^2 = 2^{-4}(Z,\overline{Z})_{\mathbf{\Lambda}}^4\,|\Phi(Z)|^2$ とおけば，$\|\Phi\|^2$ は $\mathcal{M}$ 上の関数を定めることが分かる．したがって，Y をエンリケス曲面とし，Y が定めるモジュライ空間 $\mathcal{M}\setminus\mathcal{H}$ の点を $[Y]$ で表すとき，値 $\|\Phi([Y])\|^2$ を定めることができる．

2.3 j 関数の差とボーチャーズ Φ 関数の関係

私たちの得た結果は，j 関数の差とボーチャーズ Φ 関数が，次のような関係を持つことである：任意の $(\tau, \tau') \in \mathbb{H} \times \mathbb{H} \setminus \mathfrak{D}$ に対して，

$$2^{-96}|j(\tau) - j(\tau')|^{12} = \frac{\prod_{\iota\ \text{奇の対合写像}} \|\Phi([\mathrm{Km}(E_\tau \times E_{\tau'})/\iota])\|^6}{\prod_{\iota\ \text{偶の対合写像}} \|\Phi([\mathrm{Km}(E_\tau \times E_{\tau'})/\iota])\|^4}$$

が成り立つ．（ノルムをつけないより強い等式が成り立つが，ここでは説明を簡単にするために，ノルムをつけた等式を述べている．）

証明には，エンリケス曲面の退化の様子（Stark など），ボーチャーズ Φ 関数のレベル $1,2$ カスプに関する無限積展開，j 関数の差のモンスター・リー代数の分母公式，私たちの以前の結果であるボーチャーズ Φ 関数の代数的表示

Kawaguchi, Mukai, Yoshikawa, *Resultants and the Borcherds Phi-function*, American Journal of Mathematics (2018)

などを用いる．詳細は，プレプリント arXiv:2103.02540 を参照していただきたい．

3 トロピカル多様体上の因子の正値性について

オックスフォード大学の数学研究所での在外研究中に行った別の研究は，トロピカル幾何に関するものである．トロピカル多様体上の因子の正値性について，山木壱彦氏（現筑波大学）と共同で研究を進めた．山木壱彦氏には，2019 年 3 月–4 月にオックスフォード大学の数学研究所に来て頂き，議論をして研究を進めることができた．

トロピカル幾何は進展の著しい融合的な分野で，数理物理の方向，組み合わせ論の方向からなど多くのアプローチがある．私たちは，Berkovich 解析空間からトロピカル幾何にアプローチしている．トロピカル多様体は，大雑把にいうと，整構造をもつ多面体を貼り合わせて作られる多様体である．以下は，私たちのアプローチからの概念図である．

$\mathbb{Q}$ 上に定義された代数多様体 X
ディオファンオス幾何

p 進解析化 ↙　　↘ 通常の解析化

$X_{\mathbb{C}_p}^{an}$ (Berkovich 解析空間)
非アルキメデス幾何

$X_{\mathbb{C}}$（複素多様体）
複素代数幾何

↑ 近似　↓ トロピカル化

$S \subset X_{\mathbb{C}_p}^{an}$（スケルトン）
$S \fallingdotseq$「トロピカル多様体」　トロピカル幾何　（$\mathbb{Q}$ は一般に代数体でよい．）

私たちの以前の研究で，Berkovich 解析空間の因子の正値性の観点から，トロピカル化が

いつ忠実になるかを調べた：

- Kawaguchi, Yamaki, *Effective faithful tropicalizations associated to adjoint linear systems*, International Mathematics Research Notices (2019);
- Kawaguchi, Yamaki, *Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves*, Memoirs of the American Mathematical Society (2021).

今回の研究は，トロピカル幾何の範囲で，忠実な埋込みを与えるような，因子の正値性を調べるというものである．帰国してからは，コロナ禍が始まり，大変忙しい状態で今に至るが，論文にまとめている途中である．

4 終わりに

在外研究期間中には，以下のような研究集会やセミナーで講演の機会を頂くことができた．

- Intercity Seminar on Arakelov Geometry, University of Copenhagen, 2018 年 9 月
- Vietnam-USA Joint Mathamatical Meeting, Special Session on Complex Geometry and Dynamical Systems, Quy Nhon, Vietnam, 2019 年 6 月
- Number Theory Seminar, Cambridge University, 2019 年 10 月
- Logic advanced class, Oxford University, 2019 年 12 月

オックスフォード大学の数学研究所の数論グループには，フェルマーの最終定理を解決したワイルズ教授や，素数分布の研究で高名なグリーン教授やメイナード教授が所属している．また，ロジックのグループには，数論幾何の関数体のモーデル・ラング予想をロジックを使って解決し，その他にも多くの有名な仕事をされているフルショフスキー教授や，ロジックを一部に用いて数論幾何のアンドレ・オルト予想のある場合を解決したピラ教授が所属している．モーデル・ラング予想やアンドレ・オルト予想は，私の研究分野と近く，非常に興味を持っている．オックスフォード大学中には，幸運にも，フルショフスキー教授とピラ教授とも議論する機会に恵まれ，その縁で上記のインフォーマルなセミナーで講演させて頂く機会を得た．

改めて，在外研究の機会を頂いたことに感謝したい．